

CENTRUL NAȚIONAL PENTRU CURRICULUM ȘI EVALUARE

VIII. Országos Magyar Matematikaolimpia

XXXV. EMMV

megyei szakasz, 2026. február 7.

XII. osztály

1. feladat. Ha x és y olyan tetszőleges valós számok, amelyekre $xy \neq -1$, legyen $x * y = \frac{x+y}{1+xy}$, valamint tekintsük a $G = (-1, 1)$ halmazt.

a) Igazold, hogy „ $*$ ” művelet a G -n és $(G, *)$ kommutatív csoport!

b) Számítsd ki az $(x_n)_{n \geq 1}$ sorozat határértékét, ahol $x \in G$ adott csoportelem és $x_n = \underbrace{x * x * \dots * x}_{n\text{-szer}}$, minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén!

2. feladat. Számítsd ki a következő határozatlan integrálokat:

a)

$$\int \frac{1}{x(x^{2025} + 2026)} dx, \quad x > 0.$$

b)

$$\int \frac{a \sin x + b \cos x}{b \sin x + a \cos x} dx, \quad a, b > 0, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

3. feladat. Számítsd ki az $F : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ függvény minimumát, ha

$$F(x) = \max \left\{ x^2 + \frac{2026}{x}, 2027x \right\}, \quad \forall x > 0.$$

4. feladat. Egy $n \times n$ -es táblázat mezőibe beírjuk az $1, 2, \dots, n^2$ számokat sorfolytonosan (balról jobbra, fentről lefelé).

1	2	3	\dots		n
$n+1$	$n+2$	$n+3$	\dots		$2n$
			\vdots	\dots	
			\dots		n^2

Legyen $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ (rögzített). Egy k -blokk alatt a táblázat egy olyan részét értjük, amelyet úgy kapunk, hogy a táblázaton belül a rácsvonalak mentén kijelölünk egy k egymásutáni sorból és k egymásutáni oszlopból álló, összefüggő, négyzet alakú tartományt.

a) Hány k -blokk van?

b) Határozd meg az összes lehetséges k -blokkösszeg legnagyobb közös osztóját, ha blokkösszeg alatt a blokkban lévő számok összegét értjük!

Megjegyzések: Az első két feladat 30-30 pontot, az utolsó kettő 20-20 pontot ér, amelyből hivatalból összesen jár 10 pont. Munkaidő: 3 óra.